VII. *Solutio Problematis de curvis inveniendis, quæ quadam ratione in ſitu inverſo diſpoſitæ ſe interſecare poſſunt in angulo dato.*

JAM primum ad manus pervenerunt *Acta Eruditorum* ad hunc menſem *Auguſti*, ubi invenio a me peti, ut ea aperiam, quæ notis fictis celata in *Supplementorum ad Acta Eruditorum*, Tom. 8. Sect. 1. edita ſunt. Explicentur autem ea tabulâ ſequenti.

	z	y	x	v	u	t	s	r	qu	p	o	n	m	l	j	i	h	g	f	e	d	c	b	æ	a
b	a	4	o	æ	i z	u	1	s	j	c	8 t	y	9	2	6	e p	3	m	f	7 l	v	w	5	r	h d
g	e	o	u	w	4 d	3	i	c	6	2	s z	7	5	y	æ	m t	1	r	j	9 p	a	h	v	8	f l
n	i	j	æ	5	o l	1	r	s	e	v	6 d	f	a	h	4	y z	w	u	7	9 t	3	8	c	m	2 p
q	o	8	3	u	v p	6	æ	1	c	w	h l	i	5	m	2	j d	f	e	9	a z	4	y	7	s	r t
x	u	y	4	1	c t	f	w	j	2	o	8 p	s	7	r	3	5 l	m	i	h	e d	9	æ	a	6	v z

In hac tabulâ ſex ſunt notarum ordines: ſupremus literas continet, quibus verba celata ſcribi debent, reliqui literas numeroſque continent, quæ verarum literarum loco uſurpantur. Literas autem b, g, n, q, x, quæ e lævâ horum ordinum inferiorum collocantur, propter earum uſum indices appellare licet. Scripturæ pars celata ab horum indicum duobus incipit, quorum poſterior oſtendit notas illum ſequentes in eo ordine, cui præfigitur, quæri oportere, ut veræ literæ cognoſcantur, quæ ſupra has notas in ordine literarum primo

primo ſemper habentur: Ex hoc autem ordine notæ fictæ deſumendæ ſunt, donec alteri alicui indicum occurritur, quod cum ſit, hoc novo indice utendum eſt ut priori. Et hac regulâ tota ſcriptura explicabitur, niſi quod quandocunque plures indices ſunt contigui, omnes præter ultimum negligi debent: item verborum aperte ſcriptorum interpoſitio hunc indicum uſum non turbat. Hoc modo ſcriptura occulta, ſi pauci errores typographici emendentur, verba ſequentia complecti invenietur.

Curvarum, quæ problemati conveniunt, quæcunque ſumatur ordinata, illius fluxio ſecunda ab ejuſdem fluxione primâ diviſa (ut ſermone arithmeticorum utar) eandem dat quotientem, ſed contrario ſigno, ac fluxio ſecunda a fluxione primâ diviſa ordinatæ ex alterâ principii abſciſſæ parte jacentis, & ad eandem ab eo principio diſtantiam. Hujuſmodi autem curvæ inveniri poſſunt tribus regulis.*

Prima regula curvam, qualem problema requirit, ope ſpatii hyperbolici à curvâ quacunque deducit, quæ habeat ad æquales diſtantias a principio ſuæ abſciſſæ ordinatas æquales, & ab eâdem parte abſciſſæ poſitas. Eſt enim ordinata curvæ quæſitæ, ut area alius curvæ ordinatam habentis æqualem ſegmento aſymptoti hyperbolæ terminato a ſpatio hyperbolico æquali areæ curvæ primo aſſumptæ.

Regula autem ſecunda pendet a primâ, & curvam problemati ſatisfacientem ſine ope ſpatii hyperbolici ex curvis derivat, quæ habeant ad æqualia intervalla a principio ſuæ abſciſſæ ordinatas æquales, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitas.

---

* Scilicet, ſi abſciſſa a ſuo principio in oppoſitas partes æqualibus momentis fluit.

Et

Et hæc secunda regula theorema sequens præbet, nimirum, si aliqua curva sumatur, qua problema solvi possit per regulam primam, & si hujus ordinatæ insistunt abscissæ ad perpendiculum, invenietur curva problemati satisfaciens, si ad eandem abscissam construatur alia linea curva, eâ lege, ut illius ordinata ex alterâ parte abscissæ ubique æqualis sit aggregato assumptæ lineæ curvæ & ejusdem ordinatæ; excessui autem hujus curvæ præ ordinatâ suâ æqualis sit unaquæque curvæ construendæ ordinata, quæ ex alterâ parte abscissæ jacet; omnes enim curvæ hac ratione constructæ problemati conveniunt.

Hoc autem theorema demonstratur propositione sequenti, quod in omni triangulo rectangulo quadratum ab alterutro latere angulo recto adjacenti æquale est rectangulo sub summâ alterius lateris angulo recto adjacentis laterisque angulo ei subtendentis, & sub differentiâ eorundem laterum.

Denique tertia regula derivatur a secundâ, ope propositionis nonæ libri de quadraturâ curvarum Neutoni.

SCHOLIUM.

Exemplum generale, quod exhibui, curva logarithmica, & cyclois plurimis modis investigari possunt his regulis.

Unus casus curvæ logarithmicæ commode invenitur per regulam primam, assumptâ lineâ rectâ loco curvæ in illâ regulâ memoratæ.

Alter hujus lineæ casus deducitur ex regulâ secundâ ope speciei quinquagesimæ nonæ linearum tertii ordinis, quæ omnium curvarum in illâ regulâ utilium est fere simplicissima præter parabolam cubicam & hyperbolam conicam.

Cyclois optime invenitur theoremate, quod a regulâ ſecundâ deduci diximus.

Exemplum iſtud generale facile invenitur regulâ tertiâ, aliis vero regulis non ſine ambagibus.

Regulis ſecundâ & tertiâ commodiſſime inveniuntur curvæ geometrice rationales; quæ deducuntur etiam a theoremate in regulam ſecundam pendente; quandocunque enim curva aſſumpta tam longitudinem quam ordinatam rationalem habet, cujuſmodi ſimpliciſſima eſt parabola ſemicubica, curvæ quoque inveniendæ ordinata rationalis erit.

Denique his regulis, vel etiam conditione in principio poſitâ facile eſt invenire, an curva aliqua propoſita problemati ſatisfaciet, & quibus poſitionibus id fiet: unde intelligi poteſt, an eadem curva diverſis modis problemati conveniat.

Horum brevem explicationem jam apponam, deſcribendo, ex amici chartâ, problematis ſequentis ſolutionem.

PROBLEMA.

Datis duabus lineis rectis AB, CD (in *Fig.* 1.) parallelis, ad abſciſſam AB curva EF deſcribenda eſt, quæ talis ſit, ut in ſitu inverſo ad abſciſſam CD deſcripta ſeipſam ſemper interſecet in angulo quolibet dato.

Ad abſciſſam CD deſcribantur curvæ GH, KL ſimiles & æquales curvæ EF, quarum altera huic curvæ EF occurrat in puncto quolibet I, altera vero per punctum M tranſeat, ut partes EM, KM curvarum EF, KL ſimiles ſint & æquales; & per punctum M, quod partes curvæ EF dirimit, quæ ſe mutuo interſecare debent, ducantur lineæ NMO, nMo, quæ cum rectis AB, CD angulos ſub NOB & ſub CNO, item angulos ſub noA, & ſub onD conſtituant ei æquales, in quo curva ſeipſam ſecare ponitur. Ducatur IPTS lineis AB, CD parallela;

lela; item huic proxima & parallela j x p t s; deinde ducatur I v lineæ N O parallela, & denique I w, S y parallelæ lineæ n o, ut angulus ſub I w j æqualis ſit angulo ſub I v x. Jam anguli ſub I x w & ſub I j v ſimul ſumpti æquales erunt angulo ſub x I M, ideoque & angulo ſub I w v æquales; unde angulus ſub x I w æqualis erit ei ſub I j v; & eodem modo angulus ſub j I v ei ſub I x w æqualis invenietur; adeo ut triangula I j v, x I w ſunt ſimilia, & j v : I v : : I w : w x. Porro pro abſciſſis æqualibus M P, M T ſcribatur z, pro ordinatâ P I, y, & $-v$ pro ordinatâ T S, pertinente ad curvæ K L arcum K M, qui arcui E M curvæ E F reſpondet. Creſcentibus autem abſciſſis M P, M T, & ſimul increſcentibus ordinatis P I, T S, earum fluxiones primæ eadem habebunt ſigna cum ſuis ordinatis, ſed utræque fluxiones ſecundæ idem habebunt ſignum; nam fluxio ſecunda unius ordinatæ idem habebit ſignum cum ſuâ ordinatâ, ſed alterius ordinatæ fluxio ſecunda ſignum habebit a ſigno ſuæ ordinatæ diverſum; propterea quod curvarum K M, M F alterius concavitas verſus convexitatem alterius convertitur, ut manifeſtum eſt. His autem cognitis invenietur j v : I v ($=$ P p) $: : \dot{y} : \dot{z}$, I w ($=$ T t) : w x ($=$ s y) $: : \dot{z} : -\dot{v}$, & $\dot{y} : \dot{z} : : \dot{z} : -\dot{v}$, item $-\dot{y}\dot{v} = \dot{z}^2$, & denique poſitâ $\dot{z}$ invariabili $-\dot{y}\ddot{v} - \ddot{y}\dot{v} = 0$, vel $\dot{y}\ddot{v} + \ddot{y}\dot{v} = 0$, ideoque $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$, quando y & $\ddot{y}$ ad curvam E F, ſed $\dot{v}$ & $\ddot{v}$ ad curvam K M pertinent. Idem vero locum quoque habet, quando omnes hæ fluxiones ad curvam E F referuntur, ſi abſciſſa in oppoſitas partes a ſuo principio fluere ſtatuitur; nam ſumptâ M Q $=$ M P, & M q $=$ M p, ductiſque Q R, q r ad A B, C D parallelis, puncta R, r in curvâ E F punctis S, s in curvâ K M reſpondent. Ponendo igitur abſciſſam in

contra-

contrarias partes a ſuo principio æqualibus momentis fluere, *Curvarum, quæ problemati conveniunt, quæcunque ſumatur ordinata, illius fluxio ſecunda a fluxione primâ diviſa eandem dat quotientem,* &c. ut ſupra. Hæc autem curvarum quæſitarum conditio eſt, unde deducuntur regulæ ſequentes ad problematis ſolutionem.

Regula Prima.

CUM requiritur, ut MQ exiſtente = MP ſit $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$, quando abſciſſa in oppoſitas partes a puncto M æquabiliter fluit, ita ut ejus fluxioni in partibus abſciſſæ, quæ a contrariis lateribus puncti M jacent, ſigna diverſa tribuenda ſint, ponere licet $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = \dot{z}$ ductæ in quantitatem quamcunque, quæ eadem maneat, & ſub eodem ſigno, pro eâdem magnitudine z, ſive illa affirmativa ſive negativa ſit. Deſcribatur igitur (in *Fig.* 2.) ad abſciſſam NO curva quælibet KL, cujus ordinatæ angulum quemcunque datum cum abſciſsâ conſtituant, & quæ habeat eas ordinatas æquales, &. ab eodem latere abſciſſæ NO poſitas, quæ æqualiter diſtant a puncto M, ut ordinatæ PW, QX; deinde fiat $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ ordinatæ PW $\times\, \dot{z}$ proportionalis, & $\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$ ordinatæ QX $\times\, \dot{z}$. Jam (in *Fig.* 3.) exponatur hyperbola YZ ad aſymptotos ΓΔ, ΓΘ, angulum ſub ΘΓΔ angulo dato ſub NPW æqualem comprehendentes, deſcripta, & in alterutrâ aſymptoto, ut ΓΔ, ſumatur ad libitum punctum Λ, & ducatur ΛΞ alteri aſymptoto ΓΘ parallela, & parallelogrammum ΓΞ compleatur: deinde in curvâ KL ad abſciſſam NO, & ad punctum M ordinatim

 applicetur

applicetur $M\Pi$; sumatur spatium hyperbolicum $\Lambda\Xi\Upsilon\Sigma$, rectâ $\Sigma\Upsilon$ asymptoto $\Gamma\Theta$ parallelâ abscissum, æquale spatio $WPM\Pi$, & fiat $P\Phi = \Gamma\Sigma$, eâque ratione describatur curva $\omega\Psi\Phi\Omega$; dico PI curvæ quæsitæ ordinatam esse ut spatium $MP\Phi\Psi$. Hoc autem manifestum est; fluxio enim spatii $M\Pi WP$ æqualis est fluxioni spatii $\Lambda\Xi\Upsilon\Sigma$, ideoque $PW \times \dot{z}$ $=$ fluxioni lineæ $\Gamma\Sigma$ ductæ in $\Sigma\Upsilon$ vel in $\frac{\Gamma\Lambda \times \Lambda\Xi}{\Gamma\Sigma}$; erit igitur $PW \times \dot{z}$ ut fluxio lineæ $\Gamma\Sigma$ sive lineæ $P\Phi$ per ipsam $P\Phi$ divisa; sed $PW \times \dot{z}$ est ut $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$; unde erit $P\Phi \times \dot{z}$ ut $\dot{y}$, & necessario y sive PI ut spatium $MP\Phi\Psi$. *Prima* igitur *regula curvam, qualem problema requirit, ope spatii hyperbolici*, &c. ut supra.

In exemplum hujus regulæ loco curvæ KL (in *Fig.* 2.) sumatur linea recta lineæ NO parallela, & erit linea $\omega\Psi\Phi\Omega$ ea, quæ logarithmica dicitur, cui NO asymptotos est; ideoque & linea EF etiam logarithmica, per punctum M transiens, & asymptoton habens lineæ NO parallelam; propterea quod area $MP\Phi\Psi$ hic erit ut $P\Phi - M\Psi$ (*a*). Si vero ordinatæ $\varepsilon\eta\zeta$, $\beta\alpha\gamma$ ducantur æqualiter distantes a puncto M, ordinatæque $M\Psi$ proximæ, erunt $\varepsilon\eta$, $\alpha\beta$ æquales quando primum nascuntur, quoniam spatia $\varepsilon\zeta\Psi M$, $M\Psi\gamma\alpha$ tunc æqualia sunt; ex ostensis autem est $\varepsilon\eta \times \alpha\beta$ $= M\varepsilon q$ vel $M\alpha q$, unde $\varepsilon\eta = M\varepsilon$; & $\varepsilon\eta$ ad $\frac{M\Psi\zeta\eta}{M\Psi}$ ut radius ad sinum anguli sub $NM\Psi$. Quoniam igitur PI semper est ut spatium $\Psi MP\Phi$, erit PI ubique ad $\frac{\Psi MP\Phi}{M\Psi}$ ut radius ad sinum anguli sub $NM\Psi$; &

(*a*) Vid. Barrov. Lection. Geometr. p. 123.

denique

denique limes ordinatarum negativarum ad ſpatium totum comprehenſum a parte $\Psi\,\omega$ lineæ logarithmicæ $\omega\,\Psi\,\Omega$ ab ordinatâ M Ψ, & ab aſymptoto M O ad ordinatam M Ψ applicatum ut radius ad ſinum anguli ſub N M Ψ : eſt autem rectangulum ſub M Ψ & ſub lineæ logarithmicæ $\omega\,\Psi\,\Omega$ ſubtangente ad ſpatium prædictum etiam ut radius ad ſinum anguli ſub N M Ψ : adeo ut limes ordinatarum negativarum lineæ curvæ E F æqualis erit huic ſubtangenti ; unde ſi Ψ M retro producatur ad δ, ut M δ huic ſubtangenti ſit æqualis, & ducatur $\theta\,\delta\,\lambda$ lineæ N O parallela, erit illa curvæ E F aſymptotos ; erit autem curvæ hujus E F ſubtangens lineæ M δ æqualis ; propterea quod M ε = eſt $\varepsilon\,\eta$. *Unus igitur caſus curvæ logarithmicæ commode invenitur per regulam primam*, &c. ut ſupra.

Hæc autem regula primum oſtendit modum, quo problema ſolvitur.

Regula Secunda.

Deſcribatur curva quæcunque $\varkappa$ M μ per punctum M tranſiens in *Fig.* 2. vel $\varkappa$ n c, m p μ in *Fig.* 4. ubi curva invenienda duobus cruribus e M F, E M f conſtat ; ut curvarum $\varkappa$ M μ, & $\varkappa$ n c, m p μ ordinatæ ut P ν, Q ρ, quæ æqualiter a puncto M principio abſciſſæ diſtant, ſint æquales, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitæ, ita ut mutato abſciſſæ ſigno ordinatæ ſignum etiam mutetur.

Exponatur porro (in *Fig.* 5.) hyperbola æquilatera a b cujus axis tranſverſus a g, conjugatus h q, centrum d, aſymptoti d r, d s ; ſumatur d t = P ν, & ducatur t v w ad h q perpendicularis, junctâ d w, ſumatur quoque d x = M n, & ducatur x y item rectæ lineæ h q perpendicularis, junctâ d y. Jam ſit curva K L (in *Fig.* 2.) vel K k L l (in *Fig.* 4.) talis ut ſpatium

Π M P W

ΠMPW æquale sit spatio a d w, si curva $\varkappa\,\mu$ per punctum M transit, aliter æquale spatio d a w — d a y; hac enim ratione curvæ K L, & K k L l non desinent conditionem habere, quæ in regulâ priori requiritur, nempe ut ordinatæ ad æquales distantias a puncto M sint æquales, & ab eâdem abscissæ parte positæ. Nam area hyperbolica a d w affirmativa est, quando d t vel P ν est affirmativa, & eadem area negativa est, quando d t vel Pν negativa est, quia area tota hyperbolica ab eâdem parte lineæ h q jacet; ideoque area curvarum K L, K k L l ad ordinatam M Π terminata signum suum mutabit, quando abscissa M P, magnitudine servatâ, signum mutat; & curvæ ordinata nec magnitudinem nec signum mutabit, mutatione signi abscissæ. Sit porro ' a d q = parallelogrammo $\Gamma\,\Xi$ in hyperbolâ priori: quo efficietur ut t w + t v sit ad a d ut $\Gamma\,\Sigma$ ad $\Gamma\,\Lambda$ (*a*); si igitur $\Gamma\Lambda$ fiat = a d, erit t w + t v $= \Gamma\,\Sigma =$ P Φ. Porro ducantur ordinatæ $\varepsilon\,\eta\,\zeta$, $\alpha\,\beta\,\gamma$ ordinatæ M Ψ proximæ; deinde in *Fig.* 2. ubi curva $\omega\,\Psi\,\Omega$ simplex est, cum $\varepsilon\,\eta$ sit ad $\alpha\,\beta$ ut spatium M $\Psi\,\zeta\,\varepsilon$ ad spatium M $\Psi\,\gamma\,\alpha$, erit $\varepsilon\,\eta = \alpha\,\beta$; unde & earum utraque = M ε = M α. Ideoque $\varepsilon\,\eta$ ad $\frac{M\Psi\zeta\varepsilon}{M\Psi}$ ut radius ad sinum anguli sub N M Ψ, & ubique

P I ad $\frac{M\Psi\Phi P}{M\Psi}$ in eâdem ratione. In *figurâ quartâ* ubi curva $\omega\,\psi\,\Psi\,\Omega$ ex duobus cruribus composita est, $\varepsilon\,\eta$ est ad $\alpha\,\beta$ ut spatium Ψ M $\varepsilon\,\zeta$ ad spatium ψ M $\alpha\,\gamma$ sive ut M Ψ ad M ψ, propterea quod M ε = est M α. Cum igitur necesse sit, ut $\varepsilon\,\eta \times \alpha\,\beta$ = sit M $\varepsilon\,q$, scilicet ut crura M F, M E in angulo proposito se mutuo intersecent, erit ratio $\varepsilon\,\eta$ ad M ε subduplicata rationis $\varepsilon\,\eta$ ad $\alpha\,\beta$ vel subduplicata rationis M Ψ ad M ψ:

(*a*) Vid. Philos. Transact. No. 338. prop. 4.

ideoque $\epsilon\kappa$ ad spatium $M\Psi\zeta\epsilon$ applicatum ad mediam proportionalem inter $M\Psi$, $M\psi$ ut radius ad sinum anguli sub $NM\Psi$; & generatim PI ad spatium $M\Psi\Phi P$ applicatum ad mediam proportionalem inter $M\Psi$ & $M\psi$ in eâdem ratione. Est autem $M\Psi = yx + dx$, & $M\psi = yx - dx$, & ad media est proportionalis inter $yx + dx$ & $yx - dx$. Unde utrobique dictis ad, a; dt vel $P\nu$, R; erit $P\Phi = \sqrt{aa + RR} + R$; $R = \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{P\Phi}{a} - \frac{a}{\Phi P}}$; & PI ad $\frac{MP\Phi\Psi}{a}$ ut radius ad sinum anguli sub $NM\Psi$.

Regula igitur *secunda pendet a primâ, & curvam problemati satisfacientem sine ope spatii hyperbolici*, &c. ut supra. Nam hic sine spatio hyperbolico curva invenitur, cujus quadraturâ problema solvitur.

Duæ autem sunt in hac regulâ formulæ. Formula prior nimirum $P\Phi = \sqrt{aa + RR} + R$, curvarum geometrice rationalium, quæ maxime hic requiruntur, inventioni accommodatur; facile enim est ita sumere quantitatem indeterminatam R, ut curva $\omega\Psi\Phi\Omega$ quadraturam admittat.

Ne casus magis compositi memorentur, ponatur R vel $P\nu = cz^{\frac{m}{n}}$, ut m & n numeri sint impares vel inter se primi, vel eorum alter unitas: hac enim ratione curva, cujus ordinata est $P\nu$, conditionem habebit in hac regulâ necessariam, & erit $P\Phi = \sqrt{aa + RR} + R = \sqrt{aa + ccz^{\frac{2m}{n}}} + cz^{\frac{m}{n}} = z^{\frac{m}{n}} \sqrt{cc + aaz^{\frac{-2m}{n}}} + cz^{\frac{m}{n}}$. Si igitur $\frac{m}{n} + 1$ sit vel numero $\frac{-2m}{n}$ æqualis, vel ejusdem multiplex, id est, si sumatur $m =$

— 1,

-1, & n numero cuilibet impari æqualis; pars ordinatæ $z^{\frac{m}{n}}\sqrt{cc + aaz^{\frac{-2m}{n}}} + cz^{\frac{m}{n}}$ ſub vinculo incluſa, ideoque & ordinata tota quadraturam admittet. (a)

Verbi causâ, ponatur $\frac{m}{n} = -\frac{1}{3}$, $c = 1$, & $P\Phi$ $= z^{-\frac{1}{3}}\sqrt{1 + aaz^{\frac{2}{3}}} + z^{-\frac{1}{3}}$. Unde erit area $M\Psi$ $\Phi P = \frac{\overline{1 + aaz^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{3}{2}}}{aa} + \frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$, & $PI = \overline{\frac{1}{aa} + z^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{3}{2}} + \frac{3z^{\frac{2}{3}}}{2a}$, curvaque quæſita hac æquatione comprehendetur $a \times PIq - 3z^{\frac{2}{3}} \times PI = \frac{1}{a^5} + \frac{3z^{\frac{2}{3}}}{a^3} + \frac{3z^{\frac{4}{3}}}{4a} + az^2$. In hac æquatione cum $z^{\frac{2}{3}}$ ſignum non mutabit, mutatione ſigni abſciſſæ z; pro eâdem ipſius magnitudine tam negativâ quam affirmativâ PI eandem habebit magnitudinem, & ſub eodem ſigno; unicuique autem magnitudini abſciſſæ z reſpondet & affirmativa & negativa ordinata: adeo ut curva quæſita habebit formam hic appoſitam (in *Fig.* 6.); e tribus conſtans cruribus a b c, d e, d f punctis b, d æqualiter a puncto M diſtantibus; quippe eſt $Md = Mb = \frac{1}{a^3}$: quando enim eſt $z = 0$, erit $PIq = \frac{1}{a^6}$; & $PI = \pm\frac{1}{a^3}$.

(a) Vid. in Tract. de quadr. curv. Newton. tab. curv. ſimplicior. quæ quadrari poſſunt.

Hæc

Hæc autem regulæ hujus formula prior secundum exhibet curvas quæsitas inveniendi modum.

In formulâ posteriori, cum R sit $= \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{P\Phi}{a} - \frac{a}{P\Phi}}$, R vel P ν ejusdem magnitudinis manebit, sed signum mutabit, quando abscissa magnitudinem suam signo mutato retinet, si P Φ talis sumatur, ut mutando abscissæ signum $\frac{P\Phi}{a}$ convertatur in $\frac{a}{P\Phi}$, & contra ut $\frac{a}{P\Phi}$ convertatur in $\frac{P\Phi}{a}$. Et hæc formula posterior tertium continet problema solvendi modum.

Verbi causâ, sit P $\Phi = a \times \frac{c-z}{c+z}$, quando z est affirmativa, & erit R vel P ν eodem tempore $= \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{c-z}{c+z} - \frac{c+z}{c-z}}$, quando autem z negativa est, fiet P $\Phi = a \times \frac{c+z}{c-z}$, & R vel Q $\rho = \frac{1}{2} a \times \overline{\frac{c+z}{c-z} - \frac{c-z}{c+z}}$. Hinc autem R æqualis erit $\frac{\mp 2acz}{cc-zz}$, & R $zz \mp 2acz = cc$ R; ideoque curva $\varkappa$ M μ linea tertii ordinis, imo species earum quinquagesima nona; propterea quod æquationis cc R R $+ aacc = 0$ radices sunt impossibiles (a). Linea autem curva hinc invenienda, si fiat (in *Fig.* 7.) N M vel M O $= c$, logarithmica est, cui recta A B est asymptotos. Cum

(a) Vid. Newton. Enumerat. linear. tert. ordin. ad Fig. 63.

enim P Φ ſit $= a \times \frac{c - z}{c + z}$, erit eadem $= \frac{ac}{c+z} - \frac{az}{c+z}$. Si igitur (in *Fig*. 8.) in rectâ lineâ quacunque $\alpha \varepsilon$ ſumatur $\alpha \kappa = $ O M $= c$, & ei ad perpendiculum erigantur $\alpha \beta$, $\kappa \mu$ quarum $\kappa \mu$ ſit $= a$, & ſi aſymptotis $\alpha \varepsilon$, $\alpha \beta$ per punctum μ deſcribatur hyperbola $\zeta \eta$, & ſumptâ $\kappa \nu = $ M P $= z$, ducatur $\nu \rho$ aſymptoto $\alpha \beta$ parallela; parti $\frac{ac}{c+z}$ ordinatæ P Φ reſpondet area, quæ erit ad aream $\kappa \mu \rho \nu$ ut ſinus anguli ſub N P I ad radium, & alteri parti $\frac{az}{c+z}$ ejuſdem ordinatæ reſpondet area, quæ erit ad $a \times \kappa \nu - \kappa \mu \rho \nu$ in eâdem ratione (*a*). Unde P I, quæ eſt ad $\frac{\text{M P} \Phi \Psi}{a}$ ut radius ad ſinum anguli ſub N M Ψ, erit $= \frac{2 \kappa \mu \rho \nu}{a} - \kappa \nu$. Si igitur ſumatur O $\varsigma = $ O M, & ducatur ς M ordinatæ P I retro productæ occurrens in χ, ut ſit P $\chi = $ P M $= \kappa \nu$, erit χ I $= \frac{2 \kappa \mu \rho \nu}{a}$: ideoque linea M I logarithmica, cui A B aſymptotos eſt, & ς M ordinatim applicata, efficiens cum aſymptoto A B angulum ſub A ς M verſus contingentem æqualem dimidio anguli ſub A O N. *Alter* igitur *hujus lineæ caſus deducitur*, &c. ut ſupra.

Magis generatim, ſi *r* ordinatam curvæ alicujus denotat, quæ inſtar curvarum κ M μ, & κ n c, m p μ ad abſciſſam N O deſcripta ordinatas habeat æquales, quæ

(*a*) Vid. Newton. de quadr. curv. tab. curv. ſimpl. quæ cum circ. & hyperb. compar. poſſunt, form. prim.

æqualiter

æqualiter diſtant a puncto M, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitas, poni poteſt ordinata $P\Phi = a \times$

$$\left| \begin{array}{l} \overline{b \mp cr + drr \mp er^3 + \&c \times \overline{f \mp gr + \&c}\big|^{\lambda} \times \overline{h \mp kr + lrr \mp \&c}\big|^{\mu}}\Big|^{\nu} \\ \overline{b \pm cr + drr \pm er^3 + \&c \times \overline{f \pm gr + \&c}\big|^{\lambda} \times \overline{h \pm kr + lrr \pm \&c}\big|^{\mu}}\Big|^{\nu} \end{array} \right|^{\pi}$$

Ex priori hujus regulæ ſecundæ formulâ deducitur quoque theorema, cujus ſupra fit mentio, ad inveniendas curvas tam rationales quam irrationales utile, quod quartus erit modus problema ſolvendi.

Theorema.

Quoniam eſt $P\Phi = \sqrt{aa + RR} + R$, & $R = P\nu$, manifeſtum eſt, ſi $\frac{R}{a}$ vel $\frac{P\nu}{a}$ ſit ut fluxio ordinatæ, quæ abſciſſæ ſuæ ad perpendiculum inſiſtat, alicujus curvæ, erit $\frac{\sqrt{aa + RR}}{a}$, ut ejuſdem curvæ fluxio; curvæ autem hujus ordinata æqualis erit areæ curvæ $\varkappa\mu$ ad a applicatæ, ſi angulus ſub $MP\nu$ rectus ſit, & cum area curvarum (in *Fig*, 2, 4.) $\varkappa M\mu$, & $\varkappa nc$, $mp\mu$ eodem ſigno afficiatur, tam quando abſciſſa eſt affirmativa, quam quando eſt eadem negativa, quoniam areæ ad diverſas abſciſſæ partes in illis diverſis caſibus jacent; & præterea cum eiſdem abſciſſæ magnitudinibus areæ æquales reſpondeant, curvæ, quales problema requirit, inveniri poſſunt curvarum ope, quarum ordinatæ ad eaſdem abſciſſæ magnitudines æquales ſint, & ab eâdem abſciſſæ parte poſitæ, ſi modo ordinatæ inſiſtunt abſciſſæ ad perpendiculum.

Deſcripta ſit ejuſmodi curva no, quæ tangat abſciſſam in puncto M (ut in *Fig*. 9.) ſi evaneſcat, quando abſciſſa eſt $= 0$, fluens quantitas fluxioni longitudinis curvæ no reſpondens; aliter, quæ habeat ordinatam primam Mm (ut in *Fig*. 10.) æqualem magnitudini fluentis istius quantitatis, quando abscissa est $=$ o. Erigantur ordinatæ P p, Q q; deinde erit P I curvæ quæsitæ ordinata, quæ ab alterâ parte puncti M jacet, vel $=$ M p $+$ P p, vel $=$ M m p $+$ P p; ordinata autem Q R, quæ ab alterâ parte puncti M cadit, vel $=$ M q $-$ Q q, vel $=$ M m q $-$ Q q.

Observandum autem est hoc theorema aliquando partem duntaxat curvæ quæsitæ describere.

Ex ratione autem, qua hoc theorema investigatur, manifestum est duo crura curvæ hic descriptæ ejusdem lineæ esse partes: nimirum utriusque naturam eâdem æquatione definiri. Hanc autem curvam in situ inverso dispositam se intersecare in angulo æquali angulo sub N O B inde manifestum est, quod rectangulum sub fluxione P I & sub fluxione Q R, ordinatarum scilicet æqualiter a puncto M distantium, æquale est quadrato fluxionis abscissæ: si enim curvæ n o ordinatæ w r, x t applicentur ordinatis Q q, P p proximæ, & P x, Q w sint æquales, & ducantur r s, t v abscissæ N O parallelæ, erunt triangula p t v, q r s rectangula similia & æqualia: *in omni* autem *triangulo rectangulo quadratum ab alterutro latere angulo recto adjacenti æquale est rectangulo sub summâ alterius lateris angulo recto adjacentis laterisque angulo ei subtendentis, & sub differentiâ eorundem laterum.* Igitur $\overline{tv}^2 = \overline{Px}^2 = \overline{pt+pv} \times \overline{pt-pv} = \overline{pt+pv} \times \overline{qr-qs}$: est autem ultima ratio P x ad p t $+$ p v ea, quam fluxio abscissæ habet ad fluxionem ordinatæ P I; & ratio P x vel Q w ad q r $-$ q s ea, quam fluxio abscissæ habet ad ordinatæ Q R fluxionem. Unde constat propositum. *Regula* igitur *secunda theorema*, &c. ut supra.

Jam si n o sit circuli circumferentia, linea E F cyclois erit, quando angulus sub N O B vel sub N P I rectus est. Porro si curvæ n o longitudo cum rectâ conferri potest, quarum curvarum simplicissima est parabola semicubica,

curva

curva inventa rationalis erit. Speciatim parabola semicubica, si rite disponatur, ejus curvæ partem dimidiam exhibebit, quam in exemplum formulæ prioris regulæ secundæ delineavimus; scilicet (in *Fig.* 6.) crus d e, partemque inferiorem b c cruris a b c. Reliquæ autem illius partes describi possunt, si retro producatur ordinata I P donec pars producta æqualis sit M m p — P p, & producatur R Q ab altero abscissæ latere, donec pars producta æqualis sit M m q + Q q

Nunc transeundum est ad regulam tertiam, quæ etiam curvas geometrice rationales largitur.

Regula Tertia.

Regula hæc tertia duos quoque complectitur problema solvendi modos a prioris regulæ formulis propositione nonâ tractatus de quadraturâ curvarum *Newtoni* derivatos.

Propositione istâ ad formulam regulæ præcedentis priorem adhibitâ invenitur area curvæ, cujus abscissa est z, & ordinata $\sqrt{aa + RR} + R$, æqualis areæ curvæ, cujus abscissa est R & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{R}}\sqrt{aa + RR}$ $+ \frac{\dot{z}}{\dot{R}}R$. Hinc autem quinto modo solvitur problema.

Verbi causâ, ut exemplum generale, quod antea (*a*) exhibui, investigetur, positis M P $= z$, & P v = R, ut prius, fiat $\frac{\dot{z}}{\dot{R}} = R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2}$, & erit $z = R^{\frac{m}{n}}$

(*a*) In Act, Erud. Mens. April. 1721.

$\times \overline{\frac{n}{m} c + \frac{n}{m+2n} d R^2}$; ſint autem m & n numeri impares vel inter ſe primi vel eorum alter unitas; ut ſigna abſciſſæ z & ordinatæ R ſimul mutentur, ſicut in regulâ priori requiritur; jam erit ordinata $\frac{z}{R}\sqrt{aa+RR}$ $+\frac{z}{R}R = R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c+dR^2} \times \sqrt{aa+RR} + R^{\frac{m}{n}} \times \overline{c+dR^2}$; area igitur curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $\sqrt{aa+RR}+R$, æqualis erit areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c+dR^2} \times \sqrt{aa+RR} + R^{\frac{m}{n}} \times \overline{c+dR^2}$, ſi modo hæc poſterior ordinata cum abſciſsâ ſuâ angulum contineat æqualem angulo ſub N M Ψ; unde hujus poſterioris curvæ quadraturâ linea exhibetur problemati ſatisfaciens. Erit autem hæc linea curva geometrice irrationalis, niſi m & n certos quoſdam numeros deſignant, vel certa quædam ſit relatio inter coefficientes c, d; hæ autem conditiones ratione ſequenti inveniuntur. Erit (*a*) area curvæ, cujus abſciſſa R & ordinata $R^{\frac{m}{n}} \times \overline{c+dR^2}$ $+ R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c+dR^2} \times \sqrt{aa+RR}$, ad $R^{\frac{m+n}{n}}$ $\times \overline{\frac{n}{m+n} c + \frac{n}{m+3n} d R^2} + R^{\frac{m}{n}} \times \overline{aa+RR}|^{\frac{3}{2}}$ $\times \overline{\frac{n}{maa} c + \frac{d - \frac{m+3n}{maa} \times c}{\frac{m+2n}{n} aa} R^2 + \&c.}$ ut ſinus an-

(*a*) Per prop. quint. quadr. curv. Newton.

guli

guli ſub NMΨ ad radium. Hæc autem ſeries terminabitur, & quadraturam finitam dabit, ſi n ſit unitas & m numerus negativus ternario major, vel ſi ultimus terminorum hic ſcriptorum ſit nihilo æqualis, id eſt, ſi ſit $d = \frac{m + 3n}{maa} c$, vel ſi ſit $d = 0$, $n = 1$, & $m = -3$. Et hic quidem ultimus caſus curvam exhibet, quæ theoremate præcedenti a parabolâ ſemicubicâ invenitur.

Magis generatim ponere licet $\frac{\dot{z}}{\dot{R}} = R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 + \&c \ldots + fR^p}$, ubi p numerum quemcunque parem denotat; unde fiat $z = R^{\frac{m}{n}} \times \overline{\frac{n}{m} c + \frac{n}{m+2n} dR^2 + \frac{n}{m+4n} eR^4 \ldots + \frac{n}{m+pn} fR^p}$, & curvæ $\omega\,\Omega$ ordinata $= R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 \ldots + fR^p} \times \overline{\sqrt{aa + RR} + R}$. Hinc (a) ſi n ſit unitas & m numerus negativus numero $p + 1$ major, curva dabitur geometrice rationalis, vel ſi certa quædam relatio ſit inter coefficientes c, d, e, &c. . . . . f, quæ relatio facile invenitur ut antea.

Porro ad alteram regulæ ſecundæ formulam adhibendo propoſitionem nonam memoratam libri de quadraturâ curvarum, ſextus oritur problema ſolvendi modus.

Literâ r denotante ut ſupra, fieri poteſt ordinata $P\Phi = a \times \frac{b + cr + drr + \&c}{b - cr + drr - \&c}$, area curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $P\Phi$, æqualis erit areæ curvæ,

(a) Per prop. proxim. citat.

cujus abscissa est r & ordinata $a \times \frac{\dot{z}}{r} \times \frac{b+cr+drr+\&c}{b-cr+drr-\&c}$

Ponatur igitur $\frac{\dot{z}}{r} = r^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{b+cr+drr+\&c} \times \overline{b-cr+drr-\&c}|^{p} = r^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{bb+\overline{2bd-cc} \times rr+ddr^{4}+\&c}|^{p}$, & curva, cujus ordinata est r conditionem hic necessariam habebit. Erit enim $z = r^{\frac{m}{n}} \times \overline{bb+\overline{2bd-cc} \times rr+ddr^{4}+\&c}|^{p+1} \times \overline{A+Brr+Cr^{4}+\&c}$, cujus seriei coefficientes A, B, C &c dantur per propositionem quintam Tractatus de Quadraturâ Curvarum. Manifestum autem est nec terminos hujus seriei nec quantitatem $\overline{bb+\overline{2bd-cc} \times rr+ddr^{4}+\&c}|^{p+1}$ signa sua mutare mutatione signi quantitatis r; quantitas autem $r^{\frac{m}{n}}$, si m, n numeri sint impares, signum mutabit, quandò ipsa r signum mutat; ideoque ordinata r & abscissa z signa simul mutabunt.

Ordinata autem $a \times \frac{\dot{z}}{r} \times \frac{b+cr+drr+\&c}{b-cr+drr-\&c} =$ erit $ar^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{bb+\overline{2bd-cc} \times rr+ddr^{4}+\&c}|^{p-1} \times \overline{b+cr+drr+\&c}|^{2}$. Et hinc facile inveniri possunt curvæ rationales.

Pro exemplo simplici ponatur $p = 1 = m = n$, d, $\&c = 0$; unde erit $\frac{\dot{z}}{r} = bb - ccrr$, & $z = bbr - \frac{1}{3}ccr^{3}$. Ordinata autem curvæ metiendæ $= abb + 2abcr + accrr$; ejusdem igitur area est ad $abbr + abcrr + \frac{1}{3}accr^{3}$ ut sinus anguli sub NMΨ ad radium; ideoque erit $PI = bbr + bcrr$

$+ \frac{1}{3}$

$+ \frac{1}{3} ccr^3$. Hinc autem invenitur parabolam ſemicubicam problemati ſatisfacere, quam ita deſcribere oportet. Datâ (in *Fig.* 11.) lineâ rectâ A B, & in eâ puncto C, una cum lineâ rectâ C D angulum ſub B C D cum lineâ C B conſtituente æqualem angulo, in quo curva ſe interſecare requiritur. Ducatur ad libitum H G I ad C D parallela, ſumaturque in eâ G H = 2 C G; deinde dividatur angulus ſub A C D in duas partes æquales lineâ rectâ C E, & denique ad diametrum H I & verticem H deſcribatur parabola ſemicubica K H L, quæ tranſeat per punctum C, ita ut C E ordinatim applicetur ad diametrum H I. Hæc parabola ad eandem lineam ſimiliter applicata, ſed ſitu inverſo, ſe interſecabit in angulo æquali angulo ſub B C D.

Si placet curvas hac regulâ inventas theoremate præcedente conſtruere, ex iis, quæ hic tradita ſunt, curva huic negotio apta inveniri poteſt; erit enim curvæ illius ordinata æqualis areæ curvæ $\varkappa \mu$ ad a applicatæ, quando angulus ſub M P ν rectus eſt. Verbi causâ, hujus areæ fluxio, nimirum P $\nu \times \dot{z}$ in exemplo ſecundo prioris partis hujus regulæ erit $= RR \times R^{\frac{m-n}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 \ldots + fR^p} = RR^{\frac{m}{n}} \times \overline{c + dR^2 + eR^4 \ldots + fR^p}$; ideoque curvæ hic requiſitæ ordinata erit

$$= \frac{1}{a} R^{\frac{m+n}{n}} \times \overline{\frac{n}{m+n} c + \frac{n}{m+3n} dR^2 + \frac{n}{m+5n} eR^4 \ldots + \frac{n}{\overline{m+p+1} \times n} fR^p}.$$

In exemplo poſterioris partis hujus regulæ erit R

$$\left(= \tfrac{1}{2} a \times \overline{\frac{P\Phi}{a} - \frac{a}{P\Phi}}\right) = \frac{2bcr + 2cdr^3 + \&c}{bb + \overline{2bd - cc} \times rr + ddr^4 + \&c};$$

 ideoque

ideoque $R \times \dot{z} = r r^{\frac{m}{n}} \times \overline{2 b c + 2 c d r^2 + \&c} \times$ $\overline{b b + 2 b d - c c \times r r + d d r^4 + \&c)}^{p-1}$; hæc igitur est fluxio ordinatæ curvæ quæsitæ.

Si sit $m = 1 = n = p$, d, $\&c = 0$, erit $R \times \dot{z} = 2 b c r \dot{r}$, & ordinata curvæ quæsitæ $= b c r r$; quoniam igitur $z =$ erit $b b r - \frac{1}{3} c c r^3$, erit curva quæsita in hoc casu parabola divergens cum nodo, quæ definitur hac æquatione $3 e z z = y^3 - 2 e y y + e e y$ (*a*). Et hac curvâ describetur parabola semicubica supra inventa.

Verbi causâ, ad rectam lineam (in *Fig.* 12.) A B ducatur perpendicularis C D, & ad illam ut axim describatur ejusmodi parabola divergens F E C E G. Deinde ducatur ad libitum H I angulum quemcunque datum cum rectâ A B constituens, & ducatur H K L M ad C D parallela; deinde sumatur H N = H K + arc. C K, H O = H L + arc. C K L, & ab alterâ parte puncti H, H P = C E M — H M; & curva hac ratione descripta parabola semicubica erit.

Hinc apparet quomodo curvæ, quarum investigationi regula hæc tertia aptatur, theoremate præcedenti construi possunt, postquam earum formæ cognoscuntur, sed hæ curvarum formæ, a quibus rationales deriventur, regulâ hac tertiâ optime inveniuntur.

Hæ sunt tres regulæ, quarum supra fit mentio. Ultima sententia, quæ sub notis fictis celata fuit, exemplo sequenti illustrari potest. Sit y vel $= a + b x + \sqrt{c + 2 d x + e x^2}$ vel $= \dfrac{a + b x + c x x}{d + e x}$, quæ

(*a*) Vid. Enumerat. linear. tert. ord. Fig. 73.

duæ æquationes omnes complectuntur sectiones conicas. Inde vero inveniemus $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ vel $= \frac{ec}{\overline{d+ex}}$

$$\frac{-dd}{\overline{+b\sqrt{c+2dx+exx}} \times \overline{c+2dx+exx}} \dot{z}, \text{ vel } = \frac{2cdd+2aee-2bde}{\overline{d+ex} \times \overline{bd-ae+2cdx+cexx}} \dot{z};$$

quæ æquationes ostendunt in nullâ sectione conicâ, quomodocunque disponatur, quantitatem $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ conditionem habere, quam hoc problema requirit; ideoque nullam sectionem conicam problemati satisfacere. Quod comprobari etiam potest examinando rectangulum sub fluxionibus primis ordinatarum æqualiter ad diversas partes a principio abscissæ distantium.

Hinc autem cognoscitur nullam lineam curvam geometrice rationalem problema solvere, quæ parabolâ semicubicâ sit simplicior.

Si vero talis inter quantitates a, b, c, d, e relatio statui potuisset ut $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ conditionem in hoc problemate necessariam obtineret, nempe ut quantitas, quæ in $\dot{z}$ ducitur, eadem esse potuisset, & sub eodem signo, pro eâdem magnitudine tam negativâ quam affirmativâ abscissæ z, quo eveniret ut $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$ foret $= -\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}$, si abscissa in oppositas partes a suo principio, æqualibusque momentis fluere ponitur: tum profecto sectio conica hinc determinanda vel problema solveret, vel sectionis

 proble-

problemati ſatisfacientis ordinata ad ordinatam hujus rationem haberet datam.

Jam vero his regulis alias aliquot, quas ab amico accepi, ad problema ſolvendum adjungam.

Regula Quarta.

Iiſdem poſitis ac in regulâ primâ, ſit (in *Fig.* 13.) N O ad A B, C D perpendicularis; ſint P I, Q R ordinatæ æqualiter a puncto M diſtantes, & ſit curva G H per punctum I ducta ſimilis & æqualis curvæ f E F. Ordinatis P I, Q R parallelæ & proximæ ducantur π j l, δ r, & lineæ rectæ I k, R s lineæ N O parallelæ. Angulus ſub s R r = eſt angulo ſub k I l; unde anguli ſub j I k, s R r ſimul ſumpti æquales ſunt angulo dato ſub j I l; & quantum angulus ſub j I k dimidium anguli ſub j I l ſuperat, tantum angulus ſub s R r ab eodem dimidio deficit. Si igitur (in *Fig.* 14.) radio quolibet m n circuli arcus n o deſcribatur, & ſumatur angulus ſub n m p = dimidio anguli dati ſub j I l, angulus ſub n m q = angulo ſub j I k, & angulus ſub n m t = ei ſub s R r, ſectores q m p, p m t erunt æquales. Poſitâ autem I k = R s = 1, erit j k ut tangens anguli ſub j I k vel anguli ſub n m q, & r s erit ut tangens anguli ſub s R r vel anguli ſub n m t; ideoque & fluxio ordinatæ P I erit ut tangens anguli ſub n m q, nimirum ut n v; & fluxio ordinatæ Q R ut tangens anguli ſub n m t, nimirum ut n w; curvæ igitur $\Psi\,\Phi\,\Omega$, cujus areæ ordinata P I proportionalis eſt, ordinata PΦ poteſt eſſe æqualis tangenti n v, & ordinata Qχ ab alterâ parte puncti M = n w. Quoniam autem ſectores p m q, p m t ſunt æquales, conſtitui poteſt ſector p m q æqualis areæ M Π W P curvæ cujuſcunque K L conditionem habentis in regulâ primâ indicatam; & ſector p m t æqualis areæ M Π X Q ejuſdem curvæ. Denique

que si ducatur linea recta $\varepsilon n \zeta$ lineæ $M\Psi$ parallela & proxima; cum angulus sub $\varepsilon M n$ = sit dimidio anguli sub j I l, vel angulo sub n m z, erunt triangula $\varepsilon M n$, n m z similia, & prima ratio εn ad εM eadem cum ratione z n ad n m; ideoque $\varepsilon n = \frac{M\Psi\zeta\varepsilon}{nm}$, propterea quod εM = est $\frac{M\Psi\zeta\varepsilon}{M\Psi}$, & $M\Psi = nz$. Hic autem habetur septimus modus, quo problema solvi potest.

Si loco curvæ KL linea recta sumatur, quicunque sit angulus sub n m z eadem describetur curva; adeo ut hac ratione invenitur una eademque curva, quæ diversis sitibus in angulo quocunque dato problema solvit. Hæc autem curva a circuli & hyperbolæ quadraturâ dependet; si enim ducantur $m\tau$, $n\sigma$ ad m n perpendiculares, quarum $n\sigma$ = sit m n, & asymptotis m n, $m\tau$ hyperbola $\omega\sigma\psi$ describatur, & deinde $q\varphi\upsilon$, $p\theta\varsigma$ ducantur lineis $m\tau$, $n\sigma$ parallelæ; quando MP = est arcui circuli p q, erit ordinata $PI = \frac{\theta\varphi\upsilon\varsigma}{mn}$, si m n = sit 2 $M\Pi$ (*a*).

Regula Quinta.

Describatur (in *Fig.* 13.) curva $\varkappa M\mu$ ut in regulâ secundâ, & (in *Fig.* 15.) radio = m n describatur semicirculus $\alpha\beta\gamma$, cujus centrum δ, sit autem $\delta\beta$ diametro $\alpha\gamma$ perpendicularis. Sumatur $\delta\varepsilon = P\nu$, ducatur $\varepsilon\zeta$ ad $\delta\beta$ parallela, jungaturque $\delta\zeta$. Deinde sit curva KL ejus naturæ, ut area $M\Pi WP$ semper æqualis sit sectori $\beta\delta\zeta$. In circuli arcu (*Fig.* 14.) n o du-

(*a*) Vid. Barrov. lect. geometr. pag. 110.

ctis pν sinu arcus pq, & pθ sinu arcus np, producatur mp ad z, ducaturque zξ ad pν parallela. Porro dictis mn = mp, a; mθ, b; nz, c; pν, R; nv, y; erit ut mp : pν :: mz : zξ, sed ut mθ : mn (mp) :: mn : mz; ex æquo igitur ut mθ (b) : pν(R) :: mn : zξ :: mv ($\sqrt{aa+yy}$) : zv ($y-c$) unde $by-bc=\mathrm{R}\sqrt{aa+yy}$, & denique y = nv = PΦ = $\dfrac{bbc+a\mathrm{R}\sqrt{aa-\mathrm{RR}}}{bb-\mathrm{RR}}$.

Hinc autem modo octavo solvitur problema.

Regula Sexta.

Per propositionem nonam Tractatus de Quadraturâ Curvarum area curvæ, cujus abscissa est z & ordinata $\dfrac{bbc+a\mathrm{R}\sqrt{aa-\mathrm{RR}}}{bb-\mathrm{RR}}$, æqualis est areæ curvæ, cujus abscissa est R & ordinata $\dfrac{\dot{z}}{\dot{\mathrm{R}}}\times\dfrac{bbc+a\mathrm{R}\sqrt{aa-\mathrm{RR}}}{bb-\mathrm{RR}}$.

Unde habetur modus nonus problema solvendi.

Literæ m & n eadem denotent, ac in regulâ tertiâ, & fiat $\dfrac{\dot{z}}{\dot{\mathrm{R}}}=\mathrm{R}^{\frac{m-n}{n}}\times\overline{bb-\mathrm{RR}}|^{p}$, & ordinata $\dfrac{\dot{z}}{\dot{\mathrm{R}}}\times\dfrac{bbc+a\mathrm{R}\sqrt{aa-\mathrm{RR}}}{bb-\mathrm{RR}}$ fiet $=bbc\mathrm{R}^{\frac{m-n}{n}}\times\overline{bb-\mathrm{RR}}|^{p-1}+a\mathrm{R}^{\frac{m}{n}}\times\overline{bb-\mathrm{RR}}|^{p-1}\times\sqrt{aa-\mathrm{RR}}$.

Unde si n unitatem denotet, & p numerum quemcunque integrum & affirmativum, curva geometrice rationalis invenietur.

Regula Septima.

Ducatur (in *Fig.* 15.) $\beta\lambda$ ſemicirculum $\alpha\beta\gamma$ contingens in β, & producatur $\varepsilon\zeta$ ad μ, ductâ $\delta\nu\mu$. Sit autem curva (in *Fig.* 13.) K L ejus naturæ, ut area MΠW P $=$ ſit ſectori $\delta\beta\nu$. Dictis igitur m n, a; n ż, c; & tangente arcus p q, R; erit n v $=$ P Φ $=$ $\frac{aac+aaR}{aa-cR}$. Et hic eſt decimus problema ſolvendi modus.

Quando angulus interſectionis rectus eſt, & $c=a$, hæc regula ſub formulâ poſteriori regulæ ſecundæ comprehenditur.

Item ſi loco $\varkappa$Mμ linea recta ſumatur, quicunque ſit interſectionis angulus, caſus ille curvæ logarithmicæ invenietur, quem in regulâ ſecundâ tradidimus.

Regula Octava.

Ut antea, eſt area curvæ, cujus abſciſſa z & ordinata $\frac{aac+aaR}{aa-cR}$, æqualis areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $\frac{z}{R}\times\frac{aac+aaR}{aa-cR}$. Hic autem eſt undecimus modus problema exequendi.

Literis m, n iiſdem denotantibus, ut antea, ſit $\frac{\dot{z}}{\dot{R}}=$ $R^{\frac{m-n}{n}}\times\overline{a^4-ccRR}|^p$; & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{R}}\times\frac{aac+aaR}{aa-cR}$ fiet $=R^{\frac{m-n}{n}}\times\overline{a^4c+\overline{a^4+a^2cc}\times R+aacRR}$ $\times a^4-$

$\overline{\times a^4 - ccRR}|^{p-1}$: quæ formula curvas geometrice rationales facile præbet.

Si ſit $m = 1 = n = p$; eadem parabola ſemicubica atque ex regulâ tertiâ invenietur.

Regula nona.

Si (in *Fig.* 16.) NO ad lineas AB, CD perpendicularis ſit, & ducatur curva KL, cujus ordinatæ PW, QX, quæ æqualiter a puncto M diſtant, æquales ſint, & ab eâdem abſciſſæ parte poſitæ; radio ordinatæ PW æquali deſcribatur circuli ſegmentum abc, quæ angulum comprehendat angulo æqualem, in quo curva ſe ipſam ſecare requiritur. Ducatur autem & alia curva $\varkappa M \mu$ cujus ordinatæ $P\nu$, $Q\rho$ æqualiter a puncto M diſtantes ſint æquales & a contrariis partibus abſciſſæ NO poſitæ. Deinde ſumptâ $Mf = P\nu$ ductâque fh lineæ NO ad perpendiculum, junctâque ch, manifeſtum eſt, ſi curva quæſita EF ejus ſit naturæ, ut contingens in puncto I ſemper ſit parallela lineæ ch, propoſito ſatisfaciet. Nam cum ſit $WP = QX$, idem circuli ſegmentum ordinatis PW, QX convenit; adeo ut ſi ſumatur $Mg = Q\rho$, ducatur gk ad NO perpendicularis, & jungatur ck, linea recta contingens curvam quæſitam EF in puncto R parallela erit lineæ ck. Quoniam igitur $Q\rho =$ eſt $P\nu$, ideoque $Mg = Mf$ in ſitu hujus curvæ EF inverſo, & quando punctum R in punctum I cadit, contingens in puncto R lineæ puncta a, h conjungenti parallela erit, & cum contingente in puncto I angulum conſtituet æqualem ei ſub ahc, nimirum angulo in ſegmento abc comprehenſo. Invenitur igitur hujuſmodi curva, ſi fiat ut $\dot{y} : \dot{z} :: fh : fc$. Quamobrem ſi pro PW ponatur m; pro aM

$=$ M c ponatur n; pro intervallo inter punctum M & centrum segmenti ponatur p; & pro P $\nu =$ M f, q; habebimus $\dot{y} : \dot{z} :: \sqrt{mm - qq} \pm p : n + q$, & $\dot{y} = \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q} \dot{z}$. Dantur autem rationes inter m, n, p ob datum segmenti a b c angulum, & invenietur y vel P I metiendo curvam, cujus abscissa est z & ordinata $\frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$. Hic autem exhibetur duodecimus modus problema tractandi.

Si angulus sub a h c sit rectus, erit $p = 0$, $n = m$, & ordinata curvæ metiendæ $\sqrt{\frac{m - q}{m + q}}$. Quam profecto ordinatam problemati satisfacere, intelligi quoque potest ex posteriori regulæ secundæ formulâ.

Si loco linearum curvarum K L, $\varkappa$ M μ rectæ sumantur, quando angulus sub a h c rectus est, erit curva E F cyclois; quæ facile determinatur formâ undecimâ tabulæ curvarum simpliciorum, quæ cum circulo & hyperbolâ comparari possunt in Tractatu de Quadraturâ Curvarum *Newtoni*.

Regula Decima.

Porro area curvæ, cujus abscissa est z & ordinata $\frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$, æqualis est tum areæ curvæ, cujus abscissa est m & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{m}} \times \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$; tum areæ curvæ, cujus abscissa est q & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{q}} \times \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$. Unde habentur duo alii modi, quibus problema ſolvi poteſt ; quorum poſteriori, ratione ſequenti, curvæ geometrice rationales inveniri poſſunt.

Sint δ, ε numeri impares, n numerus par, & ponatur $\frac{\dot{z}}{\dot{q}} = q^{\frac{\delta - \varepsilon}{\varepsilon}} \times \overline{n^n - q^n}$, item $m = 1 + \frac{1}{4} q q$. Unde erit $z =$ areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt q & ordinata $q^{\frac{\delta - \varepsilon}{\varepsilon}} \times \overline{n^n - q^n}$, & ordinata $\frac{\dot{z}}{\dot{q}} \times \frac{\sqrt{mm - qq} \pm p}{n + q}$ fiet $= \overline{n^{n-1} - n^{n-2} q + n^{n-3} q q + \&c \ldots - q^{n-1}} \times \overline{1 - \frac{1}{4} q q \pm p}$.

His quatuordecim diverſis modis generalibus amicus meus problematis ſolutionem abſolvit. Demonſtrationes autem illius ex compoſitione uſus in hoc problemate curvarum Geometris notarum ſic ſe habent.

De Caſu primo Linearum logarithmicarum.

Sit (in *Fig.* 17.) A B linea logarithmica aſymptoton habens C D ; eique ordinatim applicetur E F, quæ ſit ſubtangenti logarithmicæ æqualis. Ad lineam rectam E F & ad quodcunque in eâ punctum I conſtituatur alia linea logarithmica G H I priori ſimilis & æqualis, ſed ſitu inverſo diſpoſita. Deinde ſi contingentes H L, H M ducantur, dico angulum ſub L H M angulo ſub C E F eſſe æqualem.

Ordinatim applicetur H N, fiat E O = E N, ordinatim applicetur O P, & ducatur contingens P Q. Puncta P & H æqualiter diſtant a rectâ E I, unde punctum P in curvâ A B puncto H in curvâ G I reſpondet, & angulus ſub O P Q = eſt angulo ſub N H M, propterea quod curvæ A B, G I ſimiles ſunt & æquales. Quoniam vero curva A B eſt logarithmica

mica & E N, E O æquales, erit $NH \times OP = EFq$. Eſt autem $EF = NL = OQ$, unde ut $NH : EF (NL) :: EF (OQ) : OP$. Cum igitur anguli ſub H N L, Q O P ſint æquales, triangula H N L, Q O P ſunt ſimilia, & angulus ſub Q P O, qui æqualis eſt angulo ſub N H M, æqualis quoque erit angulo ſub N L H. Unde anguli ſub N H M & ſub N L H æquales erunt, & angulus ſub L H M angulo ſub C N H ſive angulo ſub C E F æqualis. Q. E. D.

De Caſu altero Linearum Logarithmicarum.

Sint (in *Fig.* 18.) A B, C D duæ lineæ rectæ parallelæ, intra quas quælibet alia linea recta E F ducatur. Ad aſymptoton A B deſcribatur linea logarithmica G H, cujus ſubtangens ſit æqualis lineæ E F, & ordinatim applicatæ comprehendant cum aſymptoto angulos verſus contingentes æquales parti dimidiæ anguli ſub A E F. Quibus poſitis, ſi ad aſymptoton C D alia deſcribatur linea logarithmica I L M priori ſimilis & æqualis, & ſi ducantur contingentes L N, L O, dico angulum ſub O L N angulo ſub B E F eſſe æqualem.

Ducatur N P, ut angulus ſub A N P angulo ſub A E F ſit æqualis, & erit $NP = EF$. Sumatur N Q lineæ E F ſive ſubtangenti lineæ logarithmicæ æqualis, jungaturque Q L. Quoniam igitur Q L punctum Q conjungit cum puncto contactus L, Q L ordinatim ad aſymptoton A B applicabitur, ideoque angulus ſub L Q N verſus contingentem L N æqualis erit parti dimidiæ anguli ſub A E F vel anguli ſub A N P; eſt autem $NP = EF = NQ$, quoniam igitur N P, N Q ſunt æquales, & angulus ſub L Q N æqualis dimidio anguli ſub A N P, recta Q L producta tranſibit per P efficiens triangulum P N Q iſoſceles. Eâdem ratione ſi ducatur O S, ut angulus ſub C O S æqualis ſit angulo

 ſub

ſub AEF erit OS = EF; ſi vero ſumatur OR = EF, ducaturque RL, ordinatim ea applicabitur ad aſymptoton CD, & producta tranſibit per S, propterea quod linea IM ſimilis eſt & æqualis lineæ GH. Erit autem angulus ſub PRL (= angulo ſub LSQ) = angulo ſub LQS = angulo ſub NPQ. Unde erit angulus ſub LSQ = angulo ſub NPQ, & triangula SLQ, PNQ ſimilia ſunt, anguluſque ſub SLQ = angulo ſub PNQ = angulo ſub BEF. Eſt autem & LS = LQ, OS = NQ, item angulus ſub OSL (= angulo ſub ORS) = angulo ſub NQL. Triangula igitur OSL, NQL æqualia ſunt, habentia baſes OL, NL æquales, & angulos ſub NLQ, OLS, etiam æquales: auferatur communis angulus ſub NLS, & relinquetur angulus ſub OLN = angulo ſub SLQ = angulo ſub BEF. Q. E. D.

De Cycloide.

Sint (in *Fig.* 19.) AB, CD duæ rectæ lineæ parallelæ, quas EF ad perpendiculum ſecet. In diametrum EF deſcribatur ſemicirculus EGF, & eo ſemicirculo deſcribatur ſemicyclois FH. Jam ſi alia ſemicyclois ILQ priori ſimilis & æqualis ſed ſitu inverſo intra parallelas deſcribatur, & ſi contingentes LM, LN ducantur, dico angulum ſub MLN rectum eſſe.

Sit IOP ſemicirculus, quo deſcribitur ſemicyclois IQ, ejus diameter IP; ducatur LGO, lineis AB, CD parallela, & jungantur FG, GE, IO. Erit deinde contingens LM parallela rectæ FG, & contingens LN parallela rectæ IO, quæ parallela eſt rectæ EG. Angulus igitur ſub MLN = eſt angulo ſub FGE recto, ideoque angulus ſub MLN rectus eſt. Q. E. D.

De

De Parabolâ Semicubicâ.

Si (in *Fig.* 20.) rectam lineam AB alia recta linea CD intersecat in puncto D cum lineâ AB angulum quemcunque constituens; & si sumatur DE $= \frac{1}{2}$ DC; deinde ducatur EF, ut DF sit = DE; & denique diametro CF & vertice C describatur parabola semicubica GCH, quæ transeat per punctum E, habeatque ordinatim applicatas ad diametrum CF lineæ FE parallelas: his positis, si parabola hæc ad lineam AB in situ inverso descripta sit, ut eandem in situ jam dicto descriptam intersecet, & contingentes ad punctum intersectionis ducantur, illæ contingentes se intersecabunt in angulo æquali angulo sub CDB.

Sumatur in parabolâ GCH punctum quodvis I, ducatur ILC, & sumptâ EM = EL ducatur MNC. Deinde ordinatim applicentur OIP, NQR, ducaturque CEV, item EX diametro CO parallela. His positis erit VX : XE :: EF : FC, & XE : XP :: DF : EF. Unde ex æquo ut VX : XP :: DF : FC, dividendoque ut VX : VP :: DF : DC. Quoniam igitur est DF = DE $= \frac{1}{2}$ DC, est etiam VX $= \frac{1}{2}$ VP. Porro ut IO*q* : EF*q* :: CO*c* : CF*c* :: VO*c* : EF*c*. Quatuor igitur ratione continuatâ proportionalium est VO secunda, quarum IO est prima & EF ultima. Est autem & IO : OV :: LF : EF. Ideoque sunt IO, OV, FL, FE quatuor ratione continuatâ proportionales; unde ut VO : LF :: LF : EF :: VO — LF : LE, componendoque ut LF + EF : EF :: VO — EF (= VX) : LE. Demonstratum autem fuit VX æqualem esse dimidio lineæ VP. Ut igitur 2 LF + 2 EF : EF :: VP : LE :: 2 LFE + 2 EF*q* : EF*q*. Jam vero ut IO : LF (:: IV : LE) :: LF*q* (2 LFE + LE*q* — EF*q*) : EF*q*, propterea quod lineæ IO,

VO

V O, L F, E F sunt quatuor ratione continuatâ proportionales; quoniam igitur ut V P : L E :: 2 L F E + 2 E F q : E F q, erit ut P I : L E :: 3 E F q — L E q : E F q. Eodem modo demonstratur ut N R : E M :: 3 E F q — E M q : E F q. Cum igitur E M = sit E L, erit N R = P I, sunt autem parallelæ, ideoque puncta N, I æqualiter distant a linea A B. Si igitur parabola semicubica G C H in situ inverso ad lineam A B describatur, punctum N incidere potest in punctum I. Parabolæ huic detur ille situs inversus $h c g$, & ducantur contingentes I Γ S, E W, Δ N T, t I δ; item lineæ W L Y, W Z M. Erit ex naturâ parabolæ hujus O S = $\frac{2}{3}$ O C, F W = $\frac{2}{3}$ F C, & Q T = $\frac{2}{3}$ Q C. Est autem & F D = $\frac{1}{3}$ F C; unde F D, D E, & D W sunt æquales, & angulus sub F E W rectus: &, cum E L sit = E M, erunt & anguli sub E W L, E W M æquales. Quoniam autem L M F lineis I O, N Q parallela est, & lineæ O C, F C Q C similiter dividuntur in punctis S, W, T, erit W L Y contingenti I S Γ parallela, & W Z M contingenti Δ N T. Est igitur angulus sub W Y D = angulo sub I Γ t, & angulus sub W Z D = angulo sub N Δ D = angulo sub I t Γ. Porro cum anguli sub E W L, E W M sint æquales, & anguli sub D E W, D W E etiam æquales propter linearum D W, D E æqualitatem, erit angulus sub Y W D = angulo sub W Z D. Ideoque angulus sub C D B, qui æqualis est summæ angulorum sub W Y D & sub Y W D, æqualis erit summæ angulorum sub I Γ t, & sub I t Γ, nimirum angulo sub Γ I δ æqualis. Q. E. D.

Lond. Aug. 27. 1722.

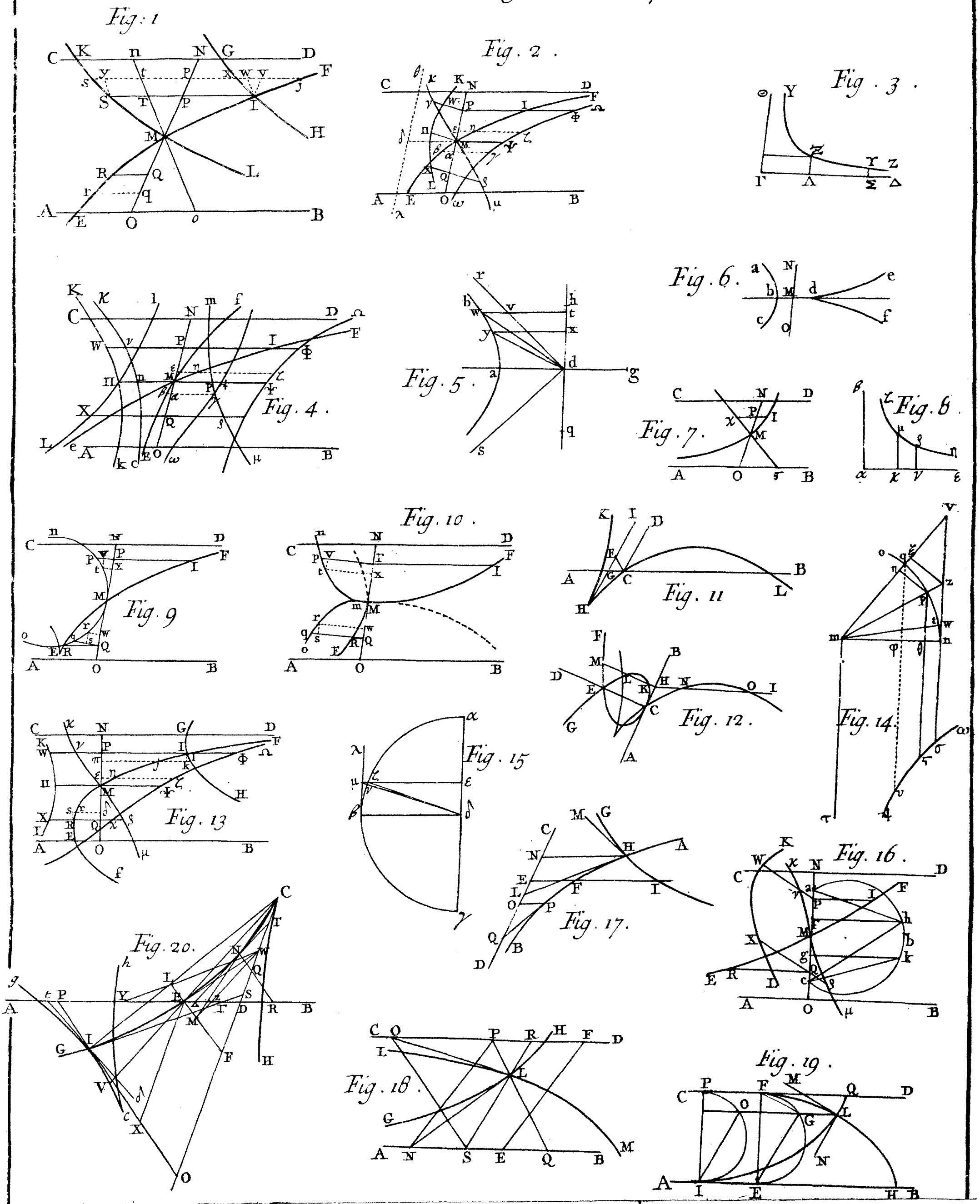
Fig: 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20